

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE  
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/59

R. Querzoli e V. Silvestrini: STUDIO CINEMATICO DEL PRO-  
CESSO  $\gamma + p \rightarrow p + 2 n^0$ .

Nota interna: n° 149  
11 Luglio 1962

LNF-62/59

Nota interna: n° 149  
11 Luglio 1962

R. Querzoli e V. Silvestrini: STUDIO CINEMATICO DEL PROCESSO  $\chi + p \rightarrow p + 2\pi^0$ .

#### INTRODUZIONE

Consideriamo la reazione:



e supponiamo che l'elemento di matrice per tale processo sia costante. In questa ipotesi, la probabilità che si presenti una qualunque configurazione delle particelle dello stato finale, è proporzionale al volume di spazio delle fasi disponibile per tale configurazione. Assumendo quanto sopra, nel baricentro della reazione (1) ciascuna particella viene ovviamente emessa isotropicamente in angolo.

Ciò che noi ci proponiamo di calcolare in tale ipotesi sono i punti seguenti:

- 1) La distribuzione in angolo ed energia dei protoni emessi nella reazione (1), nel laboratorio, per ogni fissata energia,  $K$ , del  $\chi$  primario.
- 2) Fissati un angolo ed una energia del protone, la distribuzione in angolo ed energia di un  $\chi$  di decadimento dei  $2\pi^0$ : cioè una funzione  $f(\theta_1, \phi_1, E_1)$  che esprima la densità di probabilità che un  $\chi$  venga emesso in direzione  $\theta_1, \phi_1$  con energia  $E_1$ .
- 3) Fissati un angolo e una energia del protone, la distribuzione in angolo ed energia di due dei  $\chi$  di decadimento dei  $2\pi^0$ : cioè una funzio-

ne  $f(\theta_1, \phi_1, E_1, \theta_2, \phi_2, E_2)$  che esprima la densità di probabilità che un  $\gamma$  venga emesso in direzione  $\phi_1, \theta_1$  con energia  $E_1$ , e contemporaneamente un secondo  $\gamma$  venga emesso in direzione  $\phi_2, \theta_2$  con energia  $E_2$ .

- 4) La densità di probabilità che in una data direzione vengano emessi due  $\gamma$ , con energia complessiva pari ad  $E$ .

### 1. - DISTRIBUZIONE IN ANGOLO ED ENERGIA DEI PROTONI NEL LABORATORIO.

Nelle ipotesi fatte, la distribuzione di una delle particelle uscenti da una reazione a tre corpi, nel baricentro della reazione è data da (x):

$$\begin{aligned}
 f'(\theta', \phi', p') d\omega \theta' d\phi' dp' &= \\
 &= \frac{2\pi^2}{3} p'^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{2(m_2^2 + m_3^2)}{(E'-W)^2 - p'^2} + \frac{(m_2^2 - m_3^2)^2}{[(E'-W)^2 - p'^2]^2} \right]^{1/2} \right\} \\
 (2) \quad &\left\{ 3(E'-W)^2 \left[ 1 - \frac{(m_2^2 - m_3^2)^2}{[(E'-W)^2 - p'^2]^2} \right] - \right. \\
 &\left. - p'^2 \left[ 1 - \frac{2(m_2^2 + m_3^2)}{(E'-W)^2 - p'^2} + \frac{(m_2^2 - m_3^2)^2}{[(E'-W)^2 - p'^2]^2} \right] \right\} d\omega \theta' d\phi' dp'
 \end{aligned}$$

$W$  : energia totale del baricentro

$p', E'$  : impulso ed energia della particella che interessa

$m_2, m_3$  : masse delle altre due particelle che emergono dalla reazione

$\theta', \phi'$  : anomalia e azimuth della particella rispetto alla direzione di volo della particella primaria.

Se la reazione è la (1), e si vuole la distribuzione del protone, è  $m_2 = m_3 = \mu$  ( $\mu$  = massa del  $\pi^+$ ) per

cui la (2) si riduce a:

$$\begin{aligned}
 f'(\theta', \phi', p') d\omega \theta' d\phi' dp' &= \\
 (3) \quad &= \frac{2\pi^2}{3} p'^2 \left[ 1 - \frac{4M^2}{(E'-W)^2 - p'^2} \right]^{1/2} \left\{ 3(E'-W)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - p'^2 \left[ 1 - \frac{4M^2}{(W-E')^2 - p'^2} \right] \right\} d\omega \theta' d\phi' dp'
 \end{aligned}$$

Vogliamo ora trovare la distribuzione nel laboratorio.

Per fare ciò, conviene esprimere la (3) come una distribuzione in  $E'$ :

$$\begin{aligned}
 f'(\theta', \phi', E') d\omega \theta' d\phi' dE' &= \\
 (3') \quad &= \frac{2\pi^2}{3} E' L p' \left[ 1 - \frac{4M^2}{W^2 + M^2 - 2WE'} \right]^{1/2} \\
 &\quad \cdot \left\{ 3(W-E')^2 - (E'^2 - M^2) \left[ 1 - \frac{4M^2}{W^2 + M^2 - 2WE'} \right] \right\} d\omega \theta' d\phi' dE'
 \end{aligned}$$

Per trovare la  $f(\theta, \phi, E)$ , distribuzione dei protoni nel laboratorio, si deve ora:

- a) sostituire nella  $f'$  al posto di  $E'$  la sua espressione in funzione di  $E$ :

$$E' = \frac{E - \beta p \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \text{velocità del baricentro}$$

- b) trasformare l'elemento  $dE' d\omega \theta' d\phi'$  nell'elemento  $dE d\omega \theta d\phi$ .

Per fare quest'ultima operazione, notiamo che l'espressione

$$\frac{p' dp' d\omega \theta' d\phi'}{E'} = p dE d\omega \theta d\phi$$

è un'invariante relativistica, per cui:

$$dE'd\omega\theta'd\phi' = \frac{H}{p'} dE d\omega\theta d\phi$$

Sostituendo nella (3), si trova:

$$(4) \quad f(\theta, \chi, E) = \frac{2}{3} \pi^2 p \frac{H}{W^3} \left[ 1 - \frac{2M^2}{M(K+M)-H} \right]^{1/2} \cdot \left\{ 3(W-H)^2 - (H^2 - M^2 W^2) \left( 1 - \frac{2M^2}{M(K+M)-H} \right) \right\}$$

che rappresenta appunto la distribuzione in angolo ed energia dei protoni nel laboratorio (fattore statistico dei protoni nel laboratorio).

In essa:

$$H = E(K + M) - K p \cos \theta$$

$E, p$ : energia totale ed impulso del protone nel laboratorio

$\theta$  : anomalia del protone rispetto alla direzione del  $\chi$  primario

$K$  : energia del  $\chi$  primario

$W$  : energia totale nel baricentro ( $W = \sqrt{M(M + 2K)}$ )

$\beta$  : velocità del baricentro ( $\beta = K/(K + M)$ )

$M$  : massa del  $\pi^0$

$M$  : massa del protone

## 2. - CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE DI UNO DEI $\chi$ DI DECADIMENTO DEI $2$

Nelle ipotesi fatte (elemento di matrice indipendente dai parametri cinematici delle particelle in gioco) i due  $\pi^0$  sono distribuiti isotropicamente nel loro sistema di riposo.

Una maniera semplice per dimostrare questa affermazione è la seguente: sappiamo già che ciascuna particella è emessa isotropicamente nel sistema di riposo della reazione (1). Ciò vuol dire che ciascuna di esse si trova in onda  $S$  rispetto al sistema del baricentro  $\chi - p$  ( $J = 0$ ). Dal fatto che il protone è anch'esso distribuito isotropicamente, discende che anche il sistema di riposo dei  $2\pi^0$  (che chiameremo brevemente sistema  $-2\pi^0$ ) deve essere distribuito isotropicamente, e quindi

in onda  $s$  ( $J = 0$ ).

Se ora un  $\pi^0$  avesse momento angolare  $l \neq 0$  rispetto al sistema  $-2\pi^0$ , esso avrebbe momento angolare  $l + J = l + 0 = l \neq 0$  nel sistema del baricentro  $\chi - p$ , il che è contrario alle ipotesi.

Ciò premesso, poniamoci nel sistema del laboratorio e fissiamo  $K$  (energia del  $\chi$  primario),  $p$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  parametri cinematici del protone. Poniamo per semplicità  $\phi = 180$ . Indichiamo con  $p_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  il modulo e la direzione dell'impulso totale del sistema  $-2\pi^0$ , e con  $E_0$  la sua energia totale.

Applicando i teoremi di conservazione si trova facilmente che:

$$p_0 = \sqrt{p^2 + K^2 - 2Kp \cos \theta} \quad E_0 = K - T$$

$$\beta_0 = \frac{p_0}{E_0} = \frac{\sqrt{p^2 + K^2 - 2Kp \cos \theta}}{K - T}$$

$$\tan \theta_0 = \frac{p \sin \theta}{K - p \cos \theta} \quad \phi_0 = 0$$

La somma  $W_0$  delle energie totali dei due  $\pi^0$  nel sistema  $2\pi^0$  è data da  $W_0^2 = E_0^2 - p_0^2$ , da cui:

$$W_0 = \sqrt{2} \sqrt{Kp \cos \theta - (E - m)(K - m)}$$

Nel sistema  $2\pi^0$ , ciascun  $\pi^0$  ha dunque energia totale  $E'$  ed impulso  $p'$  dati da:

$$E' = \sqrt{\frac{Kp \cos \theta - (E - m)(K + m)}{2}}$$

$$p' = \sqrt{\frac{Kp \cos \theta - (E - m)(K + m) - 2m^2}{2}}$$

ed è distribuito isotropicamente in angolo.

Cominciamo col determinare nel sistema  $2\pi^0$ , la distribuzione in energia ed angolo dei  $\chi$  di decadimento dei  $2\pi^0$ .

Questa distribuzione la otterremo in questo modo: per un fissato impulso di un  $\pi^0$ , troveremo la distribu-

zione dei suoi  $\chi$  di decadimento. Medieremo poi su tutti gli impulsi permessi (si tratterà di mediare solo su tutte le possibili direzioni, poichè il modulo di  $\vec{p}'$  è fissato).

Nel sistema di riposo del  $\pi^0$ , i  $\chi$  sono distribuiti isotropicamente:  $K d\cos\alpha^* d\epsilon^*$

$\alpha^*$ : anomalia del  $\chi$

$\epsilon^*$ : azimuth del  $\chi$ .

Passando ora al sistema  $2\pi^0$ , scegliamo come variabili indipendenti l'energia  $E'_\chi$  del  $\chi$  e il suo azimuth  $\epsilon$  rispetto alla direzione di volo del  $\pi^0$ . Si ha:

$$E'_\chi = \frac{m}{2} \frac{(1 + \beta' \cos\alpha^*)}{\sqrt{1 - \beta'^2}} \quad \epsilon = \epsilon^*$$

$\beta'$  = velocità del  $\pi^0 = \frac{p'}{E'}$

da cui  $dE'_\chi = p' d\cos\alpha^*$ ,  $d\epsilon = d\epsilon^*$ , per cui la distribuzione dei  $\chi$  nel sistema  $2\pi^0$  è data da:

$$P(E'_\chi, \epsilon) dE'_\chi d\epsilon = \frac{K}{p'} dE'_\chi d\epsilon$$

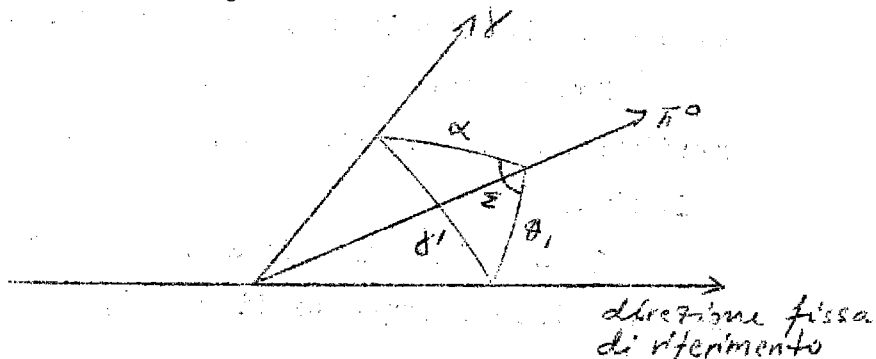
Vediamo ora come sono distribuiti i di decadimento del  $\pi^0$  riferendoci ad una direzione fissa (cioè invece che in funzione di  $E'_\chi, \epsilon$ , in funzione di  $E'_\chi, \cos\chi'$ , dove  $\cos\chi'$  è il coseno dell'angolo fra la direzione di volo del  $\chi$  e una direzione fissa).

Facciamo cioè il cambiamento di variabili:

$$E'_\chi, \epsilon \rightarrow E'_\chi, \cos\chi'$$

il cui iacobiano è:  $\frac{d\epsilon}{d\cos\chi'}$

Riferiamoci alla figura:



Per un teorema di trigonometria sferica:

$$\cos \gamma' = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \epsilon$$

da cui:

$$\epsilon = \arccos \frac{\cos \gamma' - \cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta \sin \alpha}$$

in cui  $\cos \alpha$  è funzione solo di  $E'_\gamma$ . Si ha che:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \cos \gamma'} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma' - (\cos \theta - \cos \alpha \cos \gamma')^2}}$$

per cui la distribuzione dei  $\gamma$  in funzione di  $E'_\gamma, \cos \gamma'$

$$\begin{aligned} \text{è: } f' dE'_\gamma d\cos \gamma' &= \\ &= \frac{K}{P'} \frac{dE'_\gamma d\cos \gamma'}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma' - (\cos \theta - \cos \alpha \cos \gamma')^2}} \end{aligned}$$

Dobbiamo ora mediare su  $\cos \theta_1$ . Fissati  $\gamma'$  ed  $\alpha$ ,  $\theta_1$  può variare fra  $\gamma' - \alpha$  e  $\gamma' + \alpha$ . La media è data dunque da:

$$M = K \int_{\gamma' - \alpha}^{\gamma' + \alpha} \frac{d\cos \theta_1}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma' - (\cos \theta_1 - \cos \alpha \cos \gamma')^2}} = K \pi$$

La distribuzione dei  $\gamma$  di decadimento dei due  $\pi^0$ , nel sistema  $2\pi^0$ , è data in definitiva da:

$$\frac{1}{\pi P'} dE'_\gamma d\cos \gamma' d\varphi'$$

Questa distribuzione è normalizzata a 4, quanti sono i  $\gamma$  di decadimento dei due  $\pi^0$ .  $E'_\gamma$  può variare fra  $\frac{E' - P'}{2}$  ed  $\frac{E' + P'}{2}$  (che sono le energie di un emesso rispettivamente a  $180^\circ$  e  $0^\circ$  da un  $\pi^0$  di energia  $E'$  e impulso  $P'$ ).

Si tratta ora di trasformare questa distribuzione al laboratorio, riferendo gli angoli alla direzione del  $\gamma$  primario.

Passiamo prima dal sistema  $2\pi^0$  al laboratorio, riferendo però ancora gli angoli alla direzione di volo del sistema  $2\pi^0$ .

Si tratta del cambiamento di variabili



$$E'_x, \chi', \varphi' \rightarrow E_x, \chi, \varphi$$

Si ha:

$$dE'_x d\cos\chi' d\varphi' = \frac{E_x}{E'_x} dE_x d\cos\chi d\varphi = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0 \cos\chi} dE_x d\cos\chi d\varphi$$

La legge di distribuzione dei  $\chi$  nel laboratorio è dunque data da:

$$\begin{aligned} f(E_x, \cos\chi, \varphi) dE_x d\cos\chi d\varphi &= \\ &= \frac{1}{\pi p'} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0 \cos\chi} dE_x d\cos\chi d\varphi \end{aligned}$$

Dobbiamo ora esprimere questa distribuzione in funzione di  $E_x$ ,  $\cos\theta_x$ ,  $\phi_x$ , dove  $\theta_x$  e  $\phi_x$  sono anomalia ed a zimuth del  $\chi$  rispetto alla direzione del  $\chi$  primario. Si ha:

$$\begin{aligned} d\cos\chi d\varphi &= d\cos\theta_x d\phi_x \\ \cos\chi &= \cos\theta_x \cos\theta_0 + \sin\theta_x \sin\theta_0 \cos\phi_x \end{aligned}$$

Sostituendo nella distribuzione trovata, si ottiene:

$$\begin{aligned} F(E_x, \cos\theta_x, \phi_x) dE_x d\cos\theta_x d\phi_x &= \\ (5) \quad &= \frac{1}{\pi p'} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2} dE_x d\cos\theta_x d\phi_x}{(1-\beta_0 \cos\theta_x \cos\theta_0 - \beta_0 \sin\theta_x \sin\theta_0 \cos\phi_x)} \end{aligned}$$

La (5) è la funzione di distribuzione che cercava  
mo: essa esprime la densità di probabilità che dalla rea  
zione  $\gamma + p \rightarrow p + 2\pi^0$  venga emesso un  $\chi$  nella direzione  
 $\theta_x, \phi_x$  con energia  $E_x$ , se l'elemento di matrice per la  
reazione è costante.

Fissato un angolo  $\theta_x, \phi_x$ , si tratta di una distri-  
buzione rettangolare in energia fra i limiti:

$$E_{x, \min} = \frac{E' - p'}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0 \cos\theta_x \cos\theta_0 - \beta_0 \sin\theta_x \sin\theta_0 \cos\phi_x}$$

$$E_{y \max} = \frac{E' + p' \sqrt{1 - \beta_0^2}}{2 \left( 1 - \beta_0 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \beta_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0 \cos \phi_1 \right)}$$

Ricordiamo che:

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{p^2 + k^2 - 2kp \cos \theta}}{K - T} \quad \cos \theta_0 = \frac{p \sin \theta}{K - p \cos \theta}$$

$$E' = \sqrt{\frac{Kp \cos \theta - T(K + M)}{2}} \quad p' = \sqrt{\frac{Kp \cos \theta - T(K + M) - 2p^2}{2}}$$

3. - DISTRIBUZIONE NEL LABORATORIO DI DUE DEI  $\gamma$  DI DECADIMENTO DEI DUE  $\pi^0$ .

Vogliamo ora risolvere il seguente problema: fissati i parametri cinematici del protone, vogliamo trovare una funzione di  $E_{\gamma_1}, \theta_1, \phi_1, E_{\gamma_2}, \theta_2, \phi_2$  che moltiplicata per  $dE_{\gamma_1}, d\cos\theta_1, d\phi_1, dE_{\gamma_2}, d\cos\theta_2, d\phi_2$  esprima la probabilità che mentre un  $\gamma (\gamma_1)$  viene emesso con energia  $E_{\gamma_1}$  entro l'angolo solido  $d\Omega_1(\cos\theta_1, \phi_1)$ , un secondo  $\gamma (\gamma_2)$  venga omesso con energia  $E_{\gamma_2}$  entro l'angolo solido  $d\Omega_2$ .

Poniamoci nel sistema di riposo  $2\pi^0$ .

Amnesso che  $\gamma_1$  venga emesso ad un angolo  $\cos\bar{\theta}_1, \bar{\phi}_1$  rispetto a  $2\pi^0$  con energia  $E'_1$  vediamo come sono distribuiti gli altri tre  $\gamma$ . Troviamo prima la distribuzione dei  $\gamma$  di decadimento del  $\pi^0$  da cui non proviene  $\gamma_1$ .

Questo  $\pi^0$  si troverà su un cono di apertura  $\alpha$

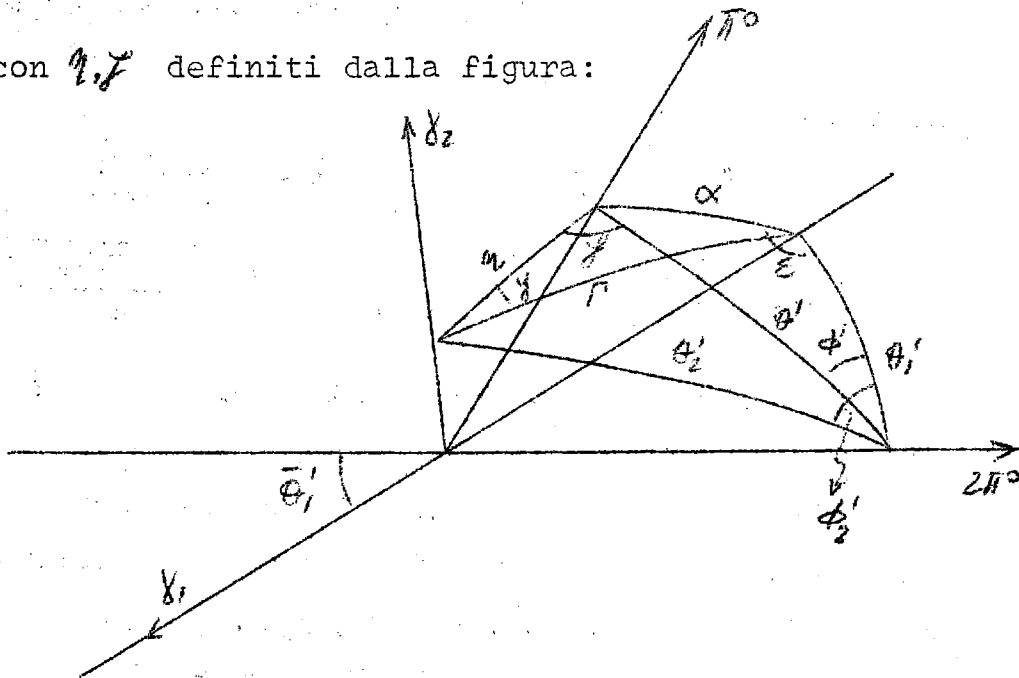
$$\left( \cos\alpha = \frac{2E'_1 - \mu\sqrt{1-\beta_1^2}}{2E'_1/\beta_1} \quad \beta_1 = \text{velocità del } \pi^0 = \frac{p'}{E'} \right)$$

intorno alla direzione  $\theta'_1 = \pi - \bar{\theta}_1, \phi'_1 = -\bar{\phi}_1$ , distribuito isotropicamente in  $\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}$  = azimuth del  $\pi^0$  rispetto alla direzione di  $\gamma_1$ ).

Fissata ora una direzione  $\theta'_2, \phi'_2$ , la probabilità che un  $\pi^0$  con  $\mathcal{E}$  compreso fra  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$  decada nella direzione  $\theta'_2, \phi'_2$  è data da:

$$K \frac{1 - \beta_1^2}{(1 - \beta_1 \cos \eta)^2} dE d \cos \eta dJ$$

con  $\eta, J$  definiti dalla figura:



Si tratta ora di passare dalle variabili  $\cos \eta, \epsilon, J$  alle variabili  $E_2', \cos \theta_2', \phi_2'$ .

Si vede subito che:

$$\cos \eta = \frac{2E_2' - \mu \sqrt{1 - \beta_1^2}}{2\beta_1 E_2'}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\cos \eta = \cos \theta_2' \cos \theta + \sin \theta_2' \sin \theta' \cos (\phi_2' - \phi')$$

$$\cos \alpha = \cos \theta' \cos \theta_2' + \sin \theta' \sin \theta_2' \cos \phi'$$

$$\cos \theta' = \cos \alpha \cos \theta_2' + \sin \alpha \sin \theta_2' \cos \epsilon$$

$$\cos \theta_2' = \cos \eta \cos \theta' + \sin \eta \sin \theta' \cos J$$

Si tratta di eliminare da esse  $\cos \theta', \phi'$  e ricavare  $\epsilon, J$  in funzione delle altre grandezze che compaiono, e calcolare quindi lo iacobiano della trasformazione  $\cos \eta, \epsilon, J \rightarrow E_2', \cos \theta_2', \phi_2'$ .

Facendo quanto detto, o anche con considerazioni dirette di carattere geometrico, si ottiene per lo iacobiano  $J$  la seguente espressione:

$$J = \frac{1}{\sin \eta \sin \Gamma \sin \gamma} \frac{\partial \cos \eta}{\partial E_2'}$$

dove gli angoli  $\Gamma, \eta$  (anch'essi definiti dalla figura) sono ricavabili dalle espressioni:

$$\cos \Gamma = \cos \theta_2' \cos \theta_1' + \sin \theta_2' \sin \theta_1' \cos \phi_2'$$

$$\cos \eta = \frac{\cos \alpha - \cos \Gamma \cos \alpha}{\sin \Gamma \sin \alpha}$$

Si vede subito che:

$$\sin \eta = \frac{1}{\sin \Gamma \sin \alpha} \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \Gamma \cos \alpha)}$$

per cui:

$$I = \frac{J}{\frac{\partial \cos \eta}{\partial E_2'}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \Gamma \cos \alpha)}}$$

d'altra parte:

$$\frac{\partial \cos \eta}{\partial E_2'} = \frac{2(1 - \beta_1 \cos \eta)^2}{\mu \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2}}$$

La distribuzione dei  $\gamma$  di decadimento del  $\pi_2^0$ , nel sistema del baricentro  $2\pi^0$ , è data allora da:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta_1^2)}{(1 - \beta_1 \cos \eta)^2} J d\omega \theta_2' d\phi_2' dE_2' &= \\ &= \frac{d\omega \theta_2' d\phi_2' dE_2'}{2\pi \beta_1 \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \Gamma \cos \alpha)}} \end{aligned}$$

Questa distribuzione è normalizzata a 2, quanti sono i  $\gamma$  di decadimento del  $\pi_2^0$ .

In quanto sopra si era supposto  $\phi_1' = 0$ . Se così non fosse stato, si sarebbe ottenuta la stessa espressione, ma al posto di  $\cos \phi_2'$  ci sarebbe stato  $\cos(\phi_1' - \phi_2')$ . La distribuzione ottenuta è inoltre funzione di  $\theta_1'$  e  $\phi_1'$ , mentre noi la vorremmo in funzione di  $\bar{\theta}_1'$  e  $\bar{\phi}_1'$  (angoli di emissione di  $\gamma_1$ ). Si tratta quindi di sostituire:

$$-\cos \bar{\theta}_1' \rightarrow \cos \theta_1'$$

$$-\cos(\bar{\phi}_2' - \bar{\phi}_1') \rightarrow \cos(\phi_2' - \phi_1')$$

La distribuzione in funzione di 6 variabili ( $E'_1$ ,  $E'_2$ ,  $\bar{\theta}'_1$ ,  $\bar{\theta}'_2$ ,  $\bar{\phi}'_1$ ,  $\bar{\phi}'_2$ ) si ottiene poi moltiplicando la espressione trovata per la probabilità che  $\gamma_1$  fosse stato emesso ad un angolo  $\bar{\theta}'_1$ ,  $\bar{\phi}'_1$  con energia  $E'_1$ ,

$$\left( = \frac{1}{\pi p'} dE'_1 d\cos\bar{\theta}'_1 d\bar{\phi}'_1 \right)$$

In definitiva si ottiene:

$$f(E'_1, E'_2, \theta'_1, \theta'_2, \phi'_1, \phi'_2) dE'_1 dE'_2 d\cos\theta'_1 d\cos\theta'_2 d\phi'_1 d\phi'_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 p'^2} \frac{dE'_1 dE'_2 d\cos\theta'_1 d\cos\theta'_2 d\phi'_1 d\phi'_2}{\sqrt{1 - f(E'_1, E'_2, \cos\theta'_1, \cos\theta'_2, \phi'_1, \phi'_2)}}$$

dove:

$$f(E'_1, E'_2, \dots) = \cos^2 \eta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma - 2 \cos \alpha \cos \eta \cos \Gamma$$

$$\cos \Gamma = -(\cos \theta'_1 \cos \theta'_2 + \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \cos(\phi'_1 - \phi'_2))$$

$$\cos \alpha = \frac{2E'_1 - \mu \sqrt{1 - \beta_1^2}}{2\beta_1 E'_1} \quad \cos \eta = \frac{2E'_2 - \mu \sqrt{1 - \beta_1^2}}{2E'_2 \beta_1}$$

In queste, come da ora in avanti, gli angoli di emissione di  $\gamma_1$  sono indicati con  $\theta'_1$ ,  $\phi'_1$  (invece che  $\bar{\theta}'_1$  e  $\bar{\phi}'_1$ ).  $E'_1$  ed  $E'_2$  possono variare fra:

$$E'_{1, \min} = \frac{E' - p'}{2} \quad E'_{1, \max} = \frac{E' + p'}{2}$$

$$E'_{2, \min} = \frac{\mu \sqrt{1 - \beta_1^2}}{2(1 - \beta_1 \cos(\Gamma + \alpha))} \quad E'_{2, \max} = \frac{\mu \sqrt{1 - \beta_1^2}}{2(1 - \beta_1 \cos(\Gamma - \alpha))}$$

Si tratta ora di trasformare questa distribuzione al laboratorio. Facciamo prima la trasformazione la trasformazione riferendo gli angoli alla direzione di volo  $2\pi^0$ .

Chiamiamo  $\theta_1, \theta_2, \gamma_1, \gamma_2$  gli angoli dei due  $\gamma$ , nel laboratorio, rispetto alla direzione di volo  $2\pi^0, \epsilon_1$ , e

$\varepsilon_2$  le loro energie.

Si tratta allora di fare il passaggio dalle variabili  $E'_1, E'_2, \theta'_1, \theta'_2, \phi'_1, \phi'_2$  alle variabili:  $\varepsilon, \varepsilon_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \psi_1, \psi_2$  dove:

$$E'_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2} (1 - \beta_0 \cos \vartheta_{1,2})}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$$

$$\cos \theta'_{1,2} = \frac{\cos \vartheta_{1,2} - \beta_0}{1 - \beta_0 \cos \vartheta_{1,2}} \quad \phi'_{1,2} = \phi_{1,2}$$

Lo iacobiano della trasformazione è dato da:

$$J = \frac{1 - \beta_0^2}{(1 - \beta_0 \cos \vartheta_1)(1 - \beta_0 \cos \vartheta_2)}$$

La distribuzione nel laboratorio risulta dunque:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{1 - \beta_0^2}{\pi p^2 (1 - \beta_0 \cos \vartheta_1)(1 - \beta_0 \cos \vartheta_2)} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{F}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2, \cos(\psi_1 - \psi_2))}}$$

in cui la  $\mathcal{F}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2, \cos(\psi_1 - \psi_2))$  è la  $f$  in cui le variabili  $E'_{1,2}, \theta'_{1,2}, \phi'_{1,2}$  sono state espresse in funzione di  $\varepsilon, \varepsilon_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \psi_1, \psi_2$ .

Riferendo infine gli angoli alla direzione del primario, si tratta di fare la sostituzione di variabili:

$$(6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= E_{1,2} \\ \cos \vartheta'_{1,2} &= \cos \theta_{1,2} \cos \theta_0 + \sin \theta_{1,2} \sin \theta_0 \cos \phi_{1,2} \\ \psi_{1,2} &= \frac{\arcsin(\cos \theta_{1,2} - \cos \theta_0 \cos \theta_{1,2})}{\sin \theta_0 \sin \theta_{1,2}} \end{aligned}$$

sostituzione a iacobiano uguale a 1.

In definitiva si ottiene:

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \phi_1, \phi_2) =$$

$$= \frac{1 - \beta_0}{[1 - \beta_0 (\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \sin \theta_0 \cos \phi_1)] [1 - \beta_0 (\cos \theta_2 \cos \theta_0 + \sin \theta_2 \sin \theta_0 \cos \phi_2)]} \cdot \frac{1}{2\pi^2 \mu^2 \sqrt{1 - f(E_1, E_2, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \phi_1, \phi_2)}}$$

dove

$$f(E_1, E_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2) = \cos^2 \eta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma - 2 \cos \eta \cos \alpha \cos \Gamma$$

in cui

$$\cos \eta = \frac{E_1'}{p_1'} - \frac{\mu^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{2 p_1' E_1 (1 - \beta_0 \cos \theta_1)}$$

$$\cos \alpha = \frac{E_2'}{p_2'} - \frac{\mu^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{2 p_2' E_2 (1 - \beta_0 \cos \theta_2)}$$

$$\cos \Gamma = \frac{(\cos \theta_1 - \beta_0)(\cos \theta_2 - \beta_0) + (1 - \beta_0^2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)}{(1 - \beta_0 \cos \theta_1)(1 - \beta_0 \cos \theta_2)}$$

In queste, al posto di  $\psi_{1,2}$ ,  $\psi_{1,2}$  vanno sostituite le loro espressioni (6) in funzione di  $\theta_{1,2}$ ,  $\phi_{1,2}$ .

Scriviamo esplicitamente la distribuzione che si ottiene solo nel caso particolare che  $\phi_1 - \phi_2 = 180^\circ$  e  $\psi_2 = 0$ , il che comporta  $\psi_1 - \psi_2 = 180^\circ$ . Si ha allora  $\cos(\psi_1 - \psi_2) = -1$ , ed inoltre  $\cos \theta_1 = \cos(\theta_1 + \theta_0)$ ,  $\cos \theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_0)$ .

La distribuzione cercata risulta:

$$(7) \quad F(E_1, E_2, \theta_1, \theta_2) dE_1 dE_2 d\cos \theta_1 d\cos \theta_2 d\phi_1 d\phi_2 = \frac{(1 - \beta_0^2) dE_1 dE_2 d\cos \theta_1 d\cos \theta_2 d\phi_1 d\phi_2}{2\pi^2 \mu^2 [1 - \beta_0 \cos(\theta_1 + \theta_0)] [1 - \beta_0 \cos(\theta_2 - \theta_0)]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos^2 \eta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \Gamma - 2 \cos \eta \cos \alpha \cos \Gamma)}}$$

dove:

$$\cos \alpha = \frac{E'}{P'} - \frac{\mu^2 \sqrt{1-\beta_0^2}}{2P'E_1 [1-\beta_0 \cos(\theta_1 + \theta_0)]}$$

$$\cos \eta = \frac{E'}{P'} - \frac{\mu^2 \sqrt{1-\beta_0^2}}{2P'E_2 [1-\beta_0 \cos(\theta_2 - \theta_0)]}$$

$$\cos \Gamma = - \frac{[\cos(\theta_1 + \theta_0) - \beta_0][\cos(\theta_2 - \theta_0) - \beta_0] - (1-\beta_0^2) \sin(\theta_1 + \theta_0) \sin(\theta_2 - \theta_0)}{[1-\beta_0 \cos(\theta_1 + \theta_0)][1-\beta_0 \cos(\theta_2 - \theta_0)]}$$

con:

$$E_{1, \min} = \frac{E' - P'}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{[1-\beta_0 \cos(\theta_1 + \theta_0)]}$$

$$E_{1, \max} = \frac{E' + P'}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{[1-\beta_0 \cos(\theta_1 + \theta_0)]}$$

$$E_{2, \min} = \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_1^2} \sqrt{1-\beta_0^2}}{[1-\beta_1 \cos(\Gamma + \alpha)][1-\beta_0 \cos(\theta_2 - \theta_0)]}$$

$$E_{2, \max} = \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_1^2} \sqrt{1-\beta_0^2}}{[1-\beta_1 \cos(\Gamma - \alpha)][1-\beta_0 \cos(\theta_2 - \theta_0)]}$$

Dobbiamo ancora vedere che cosa succede del secondo  $\chi$  di decadimento di quel  $\pi^0$  da cui proviene  $\chi_1$ .

Poniamoci ancora nel sistema di riposo  $2\pi^0$ .

Fissiamo per  $\chi_1$  una direzione  $(\chi'_1, \phi'_1)$  rispetto alla direzione di volo del sistema  $2\pi^0$  e una energia  $(E'_1)$ . Vediamo cosa succede dell'altro  $\chi$  ( $\chi_2$ ) di decadimento dello stesso  $\pi^0$ .

Se chiamiamo  $\xi$  ed  $\epsilon$  gli angoli di  $\chi_2$  rispetto alla direzione di  $\chi_1$ , la distribuzione di  $\chi_2$  è espressa dalle seguenti equazioni:



$$\cos \xi = \frac{2E_1'(E' - E_1') - \mu^2}{2E_1'(E' - E_1')} = \cos t.$$

$$E_2' = E' - E_1' = \omega t \quad P(E) dE = \frac{1}{2\pi} dE$$

Chiamando ora  $\chi_2'$ ,  $\varphi_2'$  gli angoli di  $\chi_2$  rispetto alla direzione di volo  $2\pi^0$ , e ancora  $E_2'$  la sua energia, la distribuzione si può esprimere, nelle nuove variabili, mediante le seguenti equazioni:

$$(8') \quad \cos(\varphi_2' - \varphi_1') = \frac{\cos \xi - \cos \chi_2' \cos \chi_1'}{\sin \chi_2' \sin \chi_1'}$$

$$E_2' = E' - E_1'$$

$$(9') \quad 2(\cos \chi_2') d \cos \chi_2' = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial E}{\partial \cos \chi_2'} d \cos \chi_2'$$

$$\xi = \arccos \frac{\cos \chi_2' - \cos \xi \cos \chi_1'}{\sin \xi \sin \chi_1'}$$

Queste equazioni hanno il seguente significato: fissato un  $\chi$  di energia  $E_1'$  ad un angolo  $\chi_1'$ ,  $\varphi_1'$ , il  $\pi^0$  che lo ha emesso emette un altro  $\chi(\chi_2)$ .  $\chi_2$  ha energia  $E_2' = E' - E_1'$ ; esso viene emesso solo nelle direzioni  $\varphi_2'$ ,  $\chi_2'$  che soddisfano la prima delle equazioni (8)'. La legge di distribuzione, nelle direzioni permesse, è espressa dalla (9).

Portiamoci ora al laboratorio, riferendo ancora gli angoli alla direzione di volo  $2\pi^0$ .

$$E_{1,2}' = \frac{E_{1,2} (1 - \beta_0 \cos \chi_{1,2})}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$$

$$\cos \chi_{1,2}' = \frac{\cos \chi_{1,2} - \beta_0}{1 - \beta_0 \cos \chi_{1,2}}$$

Sostituendo nelle (1)', (2)', si ottiene:

$$(8) \quad \begin{cases} \cos(\gamma_1 - \gamma_1') = \frac{(1 - \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) - \frac{m^2}{2E_1 E_2}}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2} \\ E_2 = \frac{E_1 \sqrt{1 - \beta_0^2} - E_1 (1 - \beta_0 \cos \gamma_1)}{(1 - \beta_0 \cos \gamma_2)} \end{cases}$$

$$(9) \quad P(\cos \gamma_2) d \cos \gamma_2 = \frac{(1 - \beta_0^2) d \cos \gamma_2}{(1 - \beta_0 \cos \gamma_2)^2 \sqrt{1 - (\cos^2 \gamma_1' + \cos^2 \gamma_2' + \cos^2 \gamma_1 - 2 \cos \gamma_1' \cos \gamma_2' \cos \gamma_1)}}$$

dove  $\cos \gamma_1'$ ,  $\cos \gamma_1$ ,  $\cos \gamma_2'$  si intendono espressi in funzione di  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ .

Le equazioni (8) e (9) esprimono, nel laboratorio, quanto le (8)' e (9)' esprimevano nel baricentro.

Anche se le (8) e (9) non sono le equazioni più comode ad usarsi, poichè gli angoli sono riferiti alla direzione di volo del sistema  $-2 \vec{v}$ , tralasciamo di scrivere le equazioni corrispondenti alle (8) e (9) in cui gli angoli siano riferiti alla direzione del  $\gamma$  primario: si tratta di una trasformazione a iacobiano uguale ad 1, analoga a quelle fatte per ottenere le equazioni (5) e (7).

Riassumendo: la funzione di distribuzione di due dei di decadimento dalla fotoproduzione doppia di è data dalla (7). Quando fra  $E_1$  ed  $E_2$  ci sia la relazione espressa dalla seconda delle (8), nelle direzioni che soddisfino la prima delle (8), alla (7) va aggiunta la (9).

4. - DISTRIBUZIONE DI DUE  $\gamma$  NELLA STESSA DIREZIONE.

La distribuzione (5) in angolo ed energia di un  $\gamma$  da fotoproduzione doppia di  $\pi^0$  può venire falsata se entro il rivelatore di  $\gamma$  invece che uno solo entrano due dei  $\gamma$  di decadimento dei  $2\pi^0$ .

Per valutare questo effetto ci proponiamo di calcolare la densità di probabilità che in una certa direzione vengano emessi 2  $\gamma$ , di energia complessiva E.

E' ovvio che questa approssimazione - il supporre cioè che, per entrare nel rivelatore, i due  $\gamma$  debbano essere emessi rigorosamente nella stessa direzione - è tanto più valida quanto più piccola è l'apertura angolare del rivelatore stesso.

La probabilità di avere un  $\gamma$  ( $\gamma_1$ ) nella direzione  $\theta, \varphi$  (poniamo per semplicità  $\varphi = 0$ ) con energia  $E_1$  è data dalla (5) (in cui si ponga  $\varphi = 0$ ):

$$F_1 = \frac{1}{\pi p'} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{[1-\beta_0 \cos(\theta-\theta_0)]}$$

Vogliamo trovare la probabilità che un secondo  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) venga emesso nella stessa direzione  $\theta, \varphi$ . Deve intanto trattarsi di un  $\gamma$  di decadimento del  $\pi^0$  da cui non proviene  $\gamma_1$ .

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono emessi nella stessa direzione nel laboratorio, devono essere emessi nella stessa direzione anche nel sistema  $2\pi^0$ . Poniamoci in questo sistema.

In questo sistema, allora, se  $\gamma_1$  è emesso ad angolo  $\alpha$  rispetto a  $\pi^0$ ,  $\gamma_2$  è emesso a  $\pi-\alpha$  rispetto a  $\pi^0$ . La probabilità che  $\gamma_2$  vada in direzione  $\theta, \varphi$ , è data allora da:

$$F_2' d\omega_2 \theta' d\varphi' = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\beta_1^2}{(1+\beta_1 \cos\alpha)^2} d\omega_1 \theta' d\varphi'$$

Si tratta ora di passare al laboratorio. Poichè:

$$\frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \frac{1 - \beta_0^2}{[1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0)]^2}$$

$$F_2(\text{lab}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_0^2)}{(1 + \beta_1 \cos \alpha)^2 (1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0))^2}$$

cos  $\alpha$  è funzione di  $E$ , :

$$\cos \alpha = \frac{E'}{p'} - \frac{m^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{2p'E_1 [1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0)]}$$

Il secondo  $\gamma$  ha energia fissata,  $E_2$ , dal fatto che viene emesso nel baricentro ad un angolo  $\pi - \alpha$ . Si vede subito che:

$$E_2 = \frac{E_1 m^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{4E_1 E' (1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0)) - m^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}$$

La probabilità dunque che in direzione  $\theta, \varphi$  vengano emessi due  $\gamma$ , di cui uno con energia  $E_1$  (l'energia del secondo,  $E_2$ , è funzione di  $E_1$ ), è data da:

$$F(E_1, \theta, \varphi) (d \cos \theta)^2 (d\varphi)^2 dE_1 = F_1 F_2 (d \cos \theta d\varphi)^2 dE_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 p_1^2} \frac{(1 - \beta_0^2)^{3/2} (1 - \beta_1^2) dE_1 (d \cos \theta d\varphi)^2}{(1 - \beta_1 \cos \alpha(E_1))^2 (1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0))^3}$$

Conviene esprimere questa distribuzione in funzione di  $E = E_1 + E_2$ . Si ha:

$$(1 + \beta_1 \cos \alpha)^2 = \frac{4E_1^2}{E^2}$$

$$\frac{dE_1}{dE} = \frac{E_1^2}{E} \frac{1}{(2E_1 - E)}$$

$$E_1 = E \pm \sqrt{E^2 - 2E}$$

$$\gamma = \frac{m^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{E' (1 - \beta_0 \cos(\theta - \theta_0))}$$

Facendo uso di queste si può esprimere la  $F$  in funzione di  $E$ :

$$\begin{aligned} F(E, \theta, \varphi) dE d\Omega^2 = \\ (10) \quad &= \frac{1}{8\pi^2 p^3} \frac{(1-\beta_0^2)^{3/2} (1-\beta_1)^2}{[1-\beta_0 \cos(\theta-\theta_0)]^3} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \gamma E}} dE d\Omega^2 \\ &E_{\min} = \gamma \quad E_{\max} = \left(\frac{E'}{M}\right)^2 \gamma \end{aligned}$$

La (10) rappresenta la densità di probabilità che in direzione  $\theta, \phi$  ( $\phi = 0$ ) vengano emessi due  $\gamma$  con energia complessiva pari ad  $E$ .

Ricordiamo che  $p', E', \beta_1, \beta_0$  sono funzioni di  $K$ .

APPENDICE

Le distribuzioni (5), (7), (10) che abbiamo trovato sono le distribuzioni che si hanno per una energia determinata  $K$  del  $\gamma$  primario. Se, come è quasi sempre il caso, il  $\gamma$  primario fa parte di uno spettro di bremsstrahlung, la distribuzione  $\mathcal{F}(E)$  è data da:

$$\mathcal{F}(E) = \int_{K(E)}^{K_{siner.}} \frac{dK}{K} F(E, \theta, \psi, K) \sigma(K) dK$$

dove:

$\mathcal{F}(E)$ : distribuzione in energia dei  $\pi^0$  di decadimento dei  $2\pi^0$  in una direzione determinata.

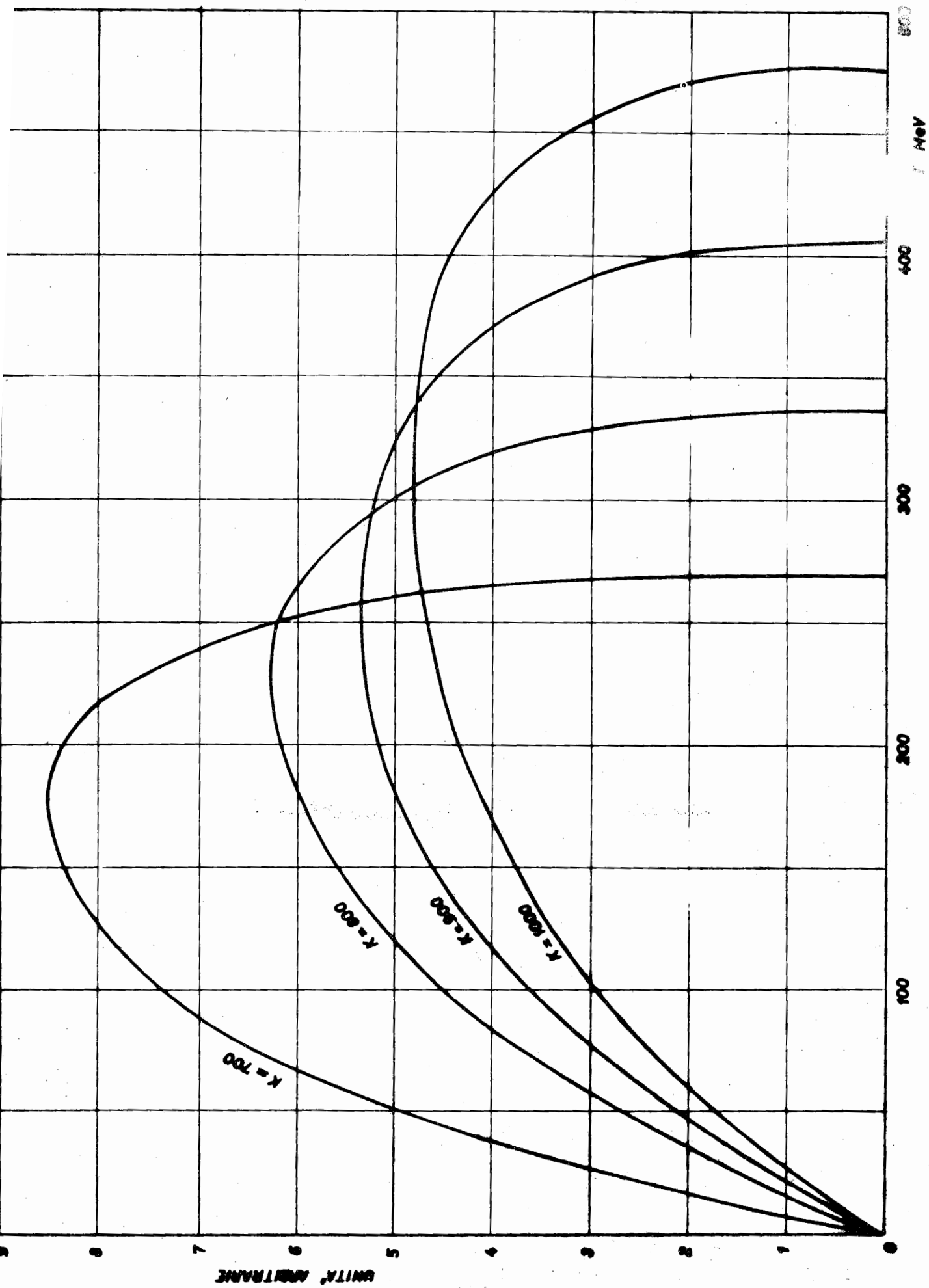
$F(E, \theta, \psi, K)$ : è la (5) [o la (7), o la (10)].

$\sigma(K)$ : sezione d'urto in fotoproduzione di  $2\pi^0$ , per una certa determinata energia e un certo determinato angolo del protone di rinculo.

$K_{siner.}$ : energia massima dello spettro di bremsstrahlung.

$K(E)$ :  $K(E_{max})_{E_{max}=E}$  (o  $K(E_{min})_{E=E_{min}}$ ), a seconda che  $E_{max}$  o  $E_{min}$  è quella che limita il minimo valore di  $K$  che contribuisce allo spettro).

In fig. 1 sono rappresentati i fattori statistici dei protoni per  $\theta = 25^\circ$ ,  $K = 700, 800, 900, 1000$  MeV. In fig. 2, a titolo d'esempio, la  $\mathcal{F}(E)$  per  $E_{siner.} = 1000$  MeV, calcolata nella ipotesi che  $\sigma(K)$  sia costante in funzione di  $K$  e isotropa in angolo.



ENERGIA CINETICA DEL  
PROTONI NEL LABORATORIO

FIG. 1 - FATTORI STATISTICI DEL PROTONI NORMALIZZATI A SEZIONE  
D'UNITA' COSTANTE NEL C.M.

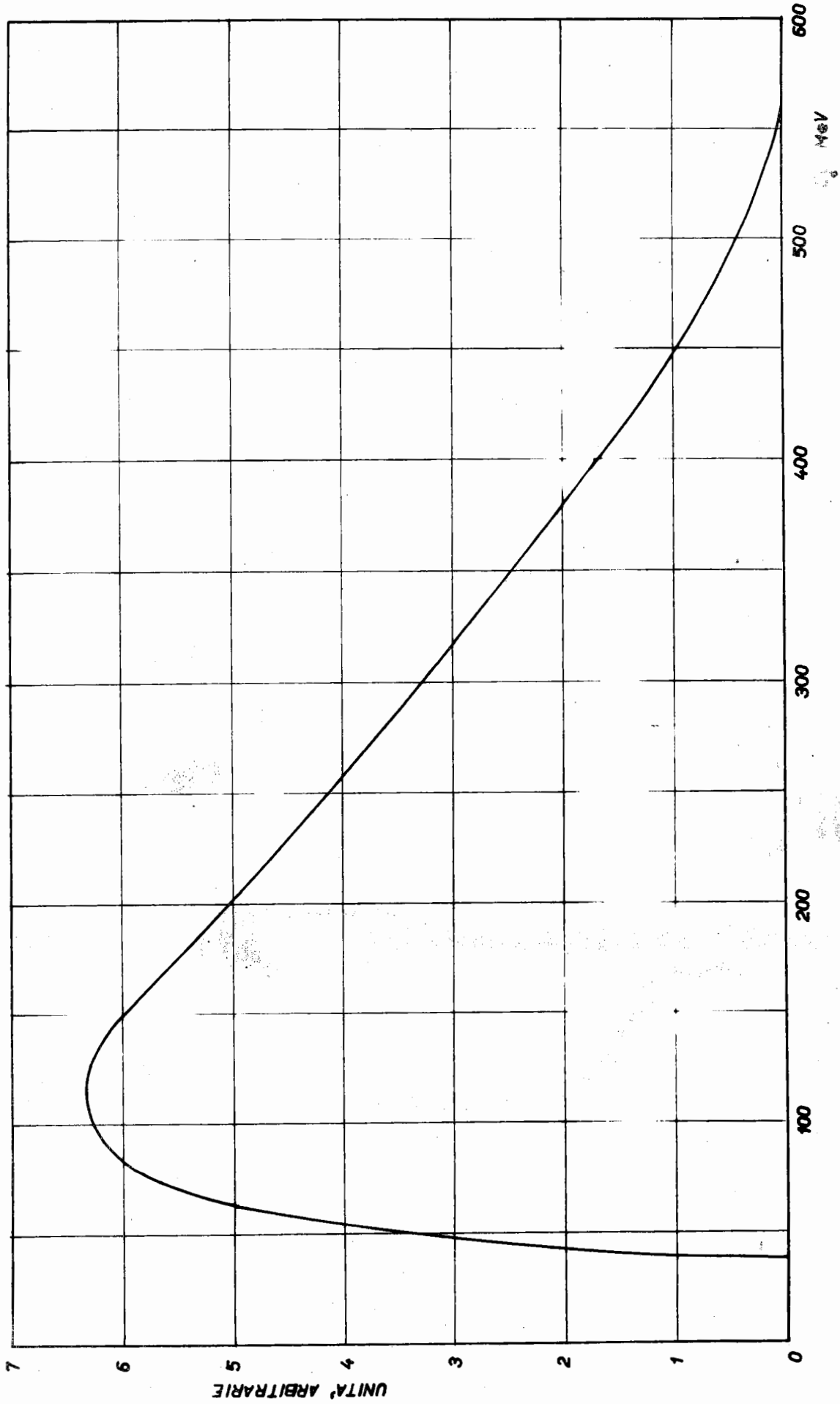


FIG. 2 - DISTRIBUZIONE DEI  $\gamma$  PER  $K_{sincr} = 1000$  MeV;  
 $\theta = 25^\circ$ ;  $T = 248$  MeV;  $\sigma_\gamma = 50^\circ$